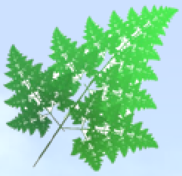


碎　形

指導老師:郎正廉　學生:張雅婷 黃心瑜 郭伊珺 張簡妙靜 紀文麒 顏大鈞

一、摘要

碎形(fractal)在1970年由法國的數學家德布洛特（Benoit B. Manderlbrot, 1924-2010）所命名，其實在更早之前他就提出碎形的概念，但是一開始並不被大家所重視，直到科學家們陸續發現為什麼海岸線不是直的?天上的雲朵為什麼不是圓的?其中還藏著更奧妙的事，科學家們才發現原來碎形在我們的生活中無所不在。

網路上做碎形的軟體很多，但是我們選擇用geogebra軟體製作，他不像其他軟體需要一串程式碼，而是利用碎形本身自我相似的性質，利用試算表將它產生的點用成串列，再將這些點連接而成，可以一層一層的呈現也讓人更容易了解碎形的形成。

二、何謂碎形?

碎形具有自我模仿的特性，自我模仿是指依照依定比例，重複製造細節，並以固定方式縮小細節，形成複雜的圖形。

古典幾何圖形定義維度皆是整數，但卻不能用來定義自然界所見的曲線，因此德國數學家Hausdorff提出了分數維度，開拓維度的定義，直到1975年，IBM的數學家 Mandelbrot寫了一本討論碎形的書，在訂定各類型碎形的分數維度。

三、研究動機

從作業中的謝爾賓斯三角形中，老師問我們知道這圖形代表的意義是什麼?當時我們沒有人回答出來，於是好奇心旺盛的我們開始上網找資料，才發現原來這跟碎形的發展相關，而碎形不僅只有康托爾集和謝爾賓斯三角形、謝爾賓斯地毯更以不同的形態出現在我們的生活中。

為了讓更多人了解碎形，因此我們決定用geogebra教學軟體呈現碎形自我相似的性質，觀察每一個步驟的變化，再從這些變化中找出碎形的結構。

四、碎形維度計算

將某一條線段分成N段後，讓每一段都按照一定比例$\frac{1}{r}$縮小，則可以得到$N\times\frac{1}{r}=1$。若對一個正方形來說，也分成N個小正方形並使每一個小正方形的邊長與原正方形的縮放比例為$\frac{1}{r}$，則$N\times(\frac{1}{r})^2=1$。因此可以歸納出:假設d是一個物體的維度將物體分成N段，使每一段的縮放比例為$\frac{1}{r}$，則關係式為

$N\times(\frac{1}{r})^d=1\Rightarrow N=r^d\Rightarrow \log N=\log r^d=d\times\log r\ \therefore d=\frac{\log N}{\log r}$。

以科赫雪花為例，一線段長度為1，將其線段以$\frac{1}{3}$向外增加一個正三角形，使線段分成四段，則維度$=d=\frac{\log 4}{\log 3}\cong 1.2618$。

五、geogebra實作-科赫雪花

科赫雪花是將一個正三角形每一個邊長，分成三等分後取中間那段向外增加一個正三角形，於是得到六個為原三角形$\frac{1}{9}$的正三角形，再將這六個正三角形以前面步驟無限繼續下去，其圖形就稱之為科赫雪花。

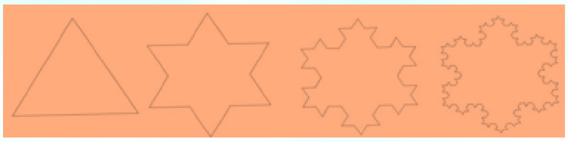
作法:

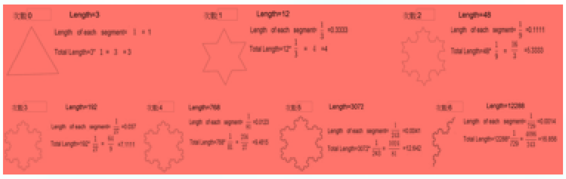
(1) snowflake[A1,B1]；snowflake自訂工具列中自行命名，目的是在產生正三角形的點

(2)Sequence[Segment[Element[A2,i],Element[A2,i+1]],i,1,Length[A2]-1]是將A2串列中的點連接起來

(3)Join[Sequence[snowflake[Element[A2,i],Element[A2,i+1]],i,1,Length[A2]-1]]是讓A2中的點做snowflake再將這些點與A2的串列作結合

下圖是我們用geogebra繪製的科赫雪花:





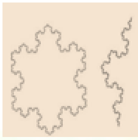
假設原正三角形之邊長等於3，則科赫雪花的新邊長計算可為前一邊長的$\frac{1}{3}$，而數目則增加為四個，由此歸納得知科赫雪花之邊長為$3\times 1, 3\times\left(\frac{1}{3}\times 4\right), 3\times\left(\frac{1}{3^2}\times 4\times 4\right), \ldots, 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n, \ldots$科赫雪花之邊長$=\lim_{n\to\infty} 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$。由圖形上我們可以看出科赫雪花以無限長的曲線圍住有限的面積。

六、結論

在這次專題中我們發現碎形具有下列特性:

(1)一個東西經過不斷放大或縮小後，始終具有自我相似的結構，但實直線雖然形式上是自相似的，卻不符合碎形的其他特質

(2)探討碎形時，我們利用geogebra軟體做出科赫雪花，讓我們更加了解碎形的基本結構，在延伸過程中，我們發現到第五次已經與第六次的圖形自我相似。



(3)我們一樣利用試算表製作萊維c形曲線，c形曲線是由直線開始，使該線為斜邊，增加一個等腰直角三角形，再由等腰直角形的兩個邊個別增加等腰直角三角形，每條直線都會被在它上面增加的等腰直角三角形的另外兩條邊取代，經過無限次過程而形成萊維c形曲線。

(4)碎形在我們的日常生活中很常見，例如前面提到的萊維c形曲線經過無限次延展，繪製出的圖形就像生活中所見的花椰菜。

河內塔

指導老師：施俊良老師 / 學生：林仁傑、林柏樺、黃筠珽、劉龍宇、黃昱熙、楊敦任、柯慧佳

摘要

GeoGebra 是一套適合國高中使用的動態數學教學軟體，不僅結合了幾何尺規作圖、幾何變換等功能，並加入函數繪圖、代數運算和基本微積分功能，是一套很完整的數學軟體。GeoGebra 可用 JavaScript 和 GeogebraScript 的程式，因此具有跨平台使用的特性。

僅本次的主題只使用 GeoGebra 本身的內建指令並不牽涉 JavaScript 的程式，希望能藉由 GeoGebra 結合動態數學呈現方式之特質來做研究操作與學習，並說明是如何用 GeoGebra 內建數學的內建指令來製作河內塔，大致上分成兩個部分，一部分是說明河內塔的玩法規則，另一部分是說明所用指令，兩者互相結合才是我們的最終目的。

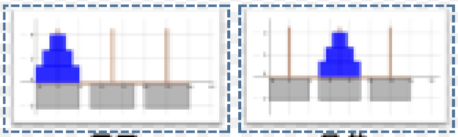
研究動機與目的

利用 Geogebra 軟體內建指令製作河內塔，並加入不同元素，使遊戲更加有趣及挑戰性。

遊戲規則

1. 組成元素：由三根柱子和 N(正整數) 個盤子構成。

2. 移動規則：一次移動一個盤子，且大盤需在小盤底。



原圖　　目的

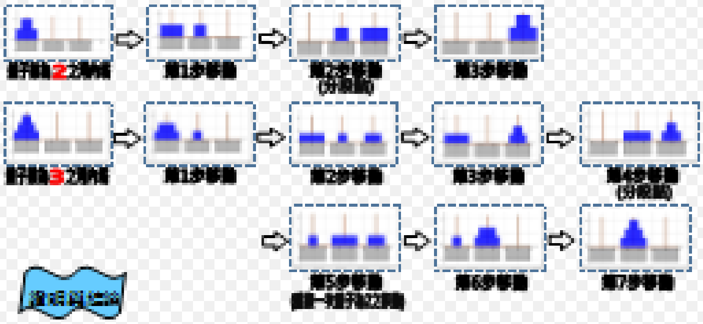
研究方法與過程

問題分析

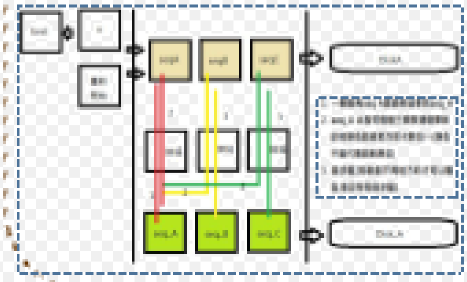
根據我們先定義之數列 An 代表最少移動次數，n 代表盤子總數，所以根據河內塔的規則得到 A1 等於 1，那 A2 呢?

以盤子數為 3 之河內塔圖中得知，第 4 步是一個分界點，將最大的盤子移動到另一個柱子上，前後第 1~3 步和第 5~6 步皆當成是盤子為 2 的移動方法與次數，所以我們可以得到 $A3=2*A2+1=7$。

依照圖像推斷可以依此 A4、A5 會發現結果是一樣的，因此得到遞迴式 $A_1=1$，$A_n=2A_{n-1}+1$



程式流程圖



演算與結論

$A_1=1$

$A_2=2\times A_1+1=3$

$A_3=2\times A_2+1=7$

$A_4=2\times A_3+1=15$

猜測 $A_n=2^n-1$，$n=1、2、3\ldots$

利用數學歸納法證明

(1) $n=1$ 時 $A_1=2^1-1=1$，(所以當 $n=1$，$A_n=2^n-1$ 成立)

(2) $n=k$ 時假設 $A_k=2^k-1$ 成立

(3) $n=k+1$ 時，$A_{k+1}=2^{k+1}-1$

因 $A_{k+1}=2\times A_k+1$，再將假設代入

得 $A_{k+1}=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$

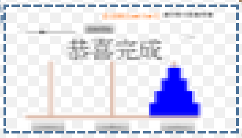
所以當 $n=k+1$，$A_{k+1}=2^{k+1}-1$ 也成立

由數學歸納法 $A_n=2^n-1$，$n=1、2、3\ldots$ 得證。

5. 結論：由上證明得知河內塔的最佳移動次數為

$A_n=2^n-1$ (n 為正整數)

完成畫面



參考文獻

- 程式碼　https://tube.geogebra.org/material/show/id/10807
- 河內塔遊戲規則　http://www.chiuchang.com.tw/toy/hanoi/hanoi.html
- 河內塔的由來－九章出版社　http://www.chiuchang.com.tw/toy/hanoi/hanoi.html

非引不可

指導教授:施俊良

學生: 許晉同 郭韋呈 鄭文韋 鍾仕彬 王俞璟 鍾印承

背 景 介 紹

獅子園居住著一群善良的獅子，邪惡的兔子神看這群獅子不爽，降下天罰，依序召出七道紅蘿蔔閃電攻擊獅子們。不過你擁有可以吸引閃電的法杖並來到了獅子園要幫助牠們逃過此劫，且有先王留下的兩個獅子盾牌來抵擋紅蘿蔔閃電。獅子們承諾 只要你幫牠們擋住一道閃電就付你兩百獅子幣，而你也承諾獅子們，如果獅子園被摧毀，也會負起責任拿出一千五百獅子幣幫牠們重建家園，面對突如其來的閃電，你能駕馭這性能難以操控的法杖嗎?

遊 戲 目 的

探討多個向量對一個物體的作用，讓閃電對獅子園產生一個較大的向量，然後再讓閃電對五個法杖各產生一個較小的向量，結合在一起變成一個合成向量，透過控制法杖來觀察向量對閃電的影響。

使用的數學概念

我們這遊戲主要在說明向量概的合成向量，有使用到平行四邊形法以及三角形法，讓多個向量合成了一個向量，這樣我們就可以判斷閃電即將前往的位置了。

遊 戲 規 則

1. 共有七道紅蘿蔔閃電會隨機出現，並朝著獅子園飛來

2. 共有五個獅子法杖可以改變紅蘿蔔閃電軌跡，但是獅子法杖被摧毀的話，會扣 100 分

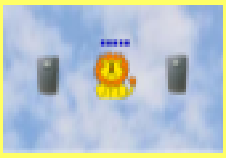
3. 共有兩個獅子盾牌，你必須使用獅子法杖把紅蘿蔔閃電引導到獅子盾牌上，每擋一個紅蘿蔔閃電可以獲得 200 分

4. 當七道紅蘿蔔閃電結束或者獅子園被摧毀的時，遊戲就會 Game Over。

參 考 文 獻

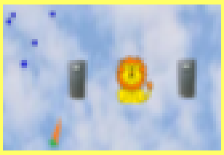
http://www.ezcommerce.com.tw/oo/myshop/df999/upload/dp/%E9%98%B2%E5%BD%88%E7%9B%BE%E7%89%8C.png

遊 戲 畫 面



開始畫面
紅蘿蔔閃電隨時會出現要當心一點喔

紅蘿蔔閃電出現啦
趕快移動你的法杖改變軌跡吧



改變軌跡
終於成功把紅蘿蔔閃電引導到盾牌啦

Game Over
紅蘿蔔閃電沒有成功引導到盾牌上，所以 Game Over 了

互動式骰子博弈

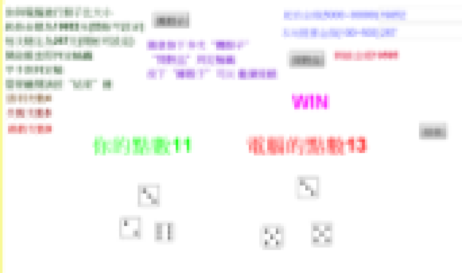
指導老師：施俊良

組員：蔡佳邦、陳緯丹、羅俊傑、黃懷嫻

使用 geogebra 製作一個以骰子與電腦進行比大小的遊戲，玩家與電腦都持有三顆公正骰子，經過骰子骰出比大小，如玩家骰出數字和大於電腦，則可以獲得獎金，如平手或小於電腦，則失去獎金，當需要結束遊戲，即按”結束”結算獎金。

(圖一)

為一開始進入介面，輸入金額起始金額、賭金後即可按下擲骰子。



(圖二)

為進行遊戲過程圖，左方顯示遊戲次數及勝利失敗次數，如想結束遊戲即按下結束鍵。

(圖三)

為按下結束鍵後所顯示出的介面，此時會顯示出骰總共獲得的金額，如想要重新開始，則按下開始即可。

程式內使用到的 geogebra script 指令

1.SetValue[物件,變更值]

2.RandomElement[隨機的物件]

3.If[條件,成立執行]

4.If[條件,成立執行,不成立執行]

5.設定真假值

財數四專題－利用GeoGebra製作四則運算

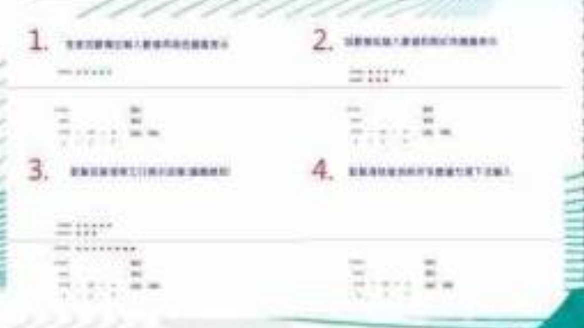
指導教授:郎正廉

製作者:陳冠彰 莊碩文 林佳緯 沈欣懌 王惟申 蔡明洋 林致仰

研究目的:

藉由GeoGebra製作能使國小學生快速理解四則運算的程式檔，利用圖示與文字表達算式使得教學者能夠更輕鬆的解釋運算原理，使得學生能更快速理解運算內容

加法:運用圖案的遞增來明白加法原理。



減法:運用圖案挖空的現象來表達減法的概念。

乘法:運用圖形來輔助，使得大腦自動浮現。

除法:實際操作分餅的動作，來達到除法原理的表達。

總結:

透過清楚解析四則運算的運作方式與背後的含義，讓學習者跳脫抽象的數字運算，徹底了解加減乘除所代表的意義，幫助他們建立扎實的觀念，令其在更複雜的運算中能夠不輕易陷入混亂。

四則運算只是最基礎的能力，往後碰到的問題肯定會有加減乘除一併使用的情況出現。但只要掌握最基礎的核心意義，更繁複的運算式也能迎刃而解，而這也就是我們製作這些四則運算圖解最初的出發點。